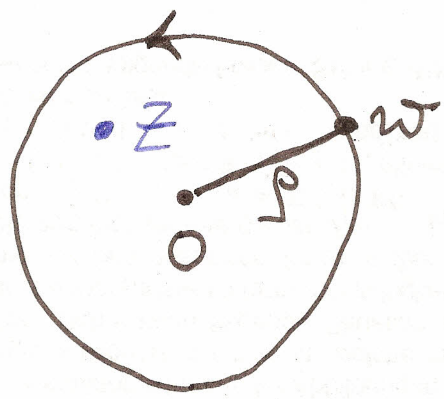
zur Vereinfachung: $z_0 = 0$



es ist

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{1 - z/w} \cdot \frac{1}{w} =$$

$$\frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(z/w\right)^n$$

wegen $\left|z/w\right| < 1$ (geom. Reihe!);

Einsetzen in ⊛ $\Longrightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(0)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n \frac{1}{w}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\mathcal{K}_\rho(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

$$=: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $\boxed{a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw}$

<u>Feststellung 1</u>:

$f(z)$ hat eine Potenzreihendarstellung mit Koeffizienten a_n wie oben

<u>Feststellung 2</u>: nach Cauchy's Formel für Ableitungen

(vgl. Satz 23.2.2) ist

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa_\rho(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 .$$

Damit ist Satz 24.1.2 hergeleitet. Die kleinen Änderungen für $z_0 \neq 0$ überlege man selbst. $\square$

<u>Anmerkung</u>: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph auf der beliebigen offenen Menge U.

Wählt man $z_0 \in U$ beliebig, so

Satz 24.1.2

„Taylor-Entwicklung": Es ist

$$(*)\quad \begin{cases} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \\[2ex] a_n := \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial K_r(z_0)} \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \\[2ex] \overset{(\text{Cauchy})}{=} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{cases}$$

für holomorphe $f : U$ (offen) $\to \mathbb{C}$

Dabei: $z_0 \in U$, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$;

$$\boxed{(*) \text{ gilt dann für } \underline{\text{alle}} \ z \in B_r(z_0).}$$

(weiter mit $\longrightarrow$ Beispiel)

konvergiert die Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \cdot (z-z_0)^n$

$\boxed{\text{gegen } f(z)}$ auf jeder offenen Kreisscheibe $B_r(z_0)$, die in U enthalten ist.

<u>Beispiel</u>: (eine Warnung vorweg)

Ist $f(z)$ holomorph und geht es um mögliche Taylor-Entwicklungen, so sollte man <u>nicht</u> <u>stur</u> die Formel $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

für die Koeff. benutzen, also zwanghaft Ableitungen ausrechnen! Mit Rückgriff auf bekannte Reihen kommt man manchmal schneller zum Ziel.

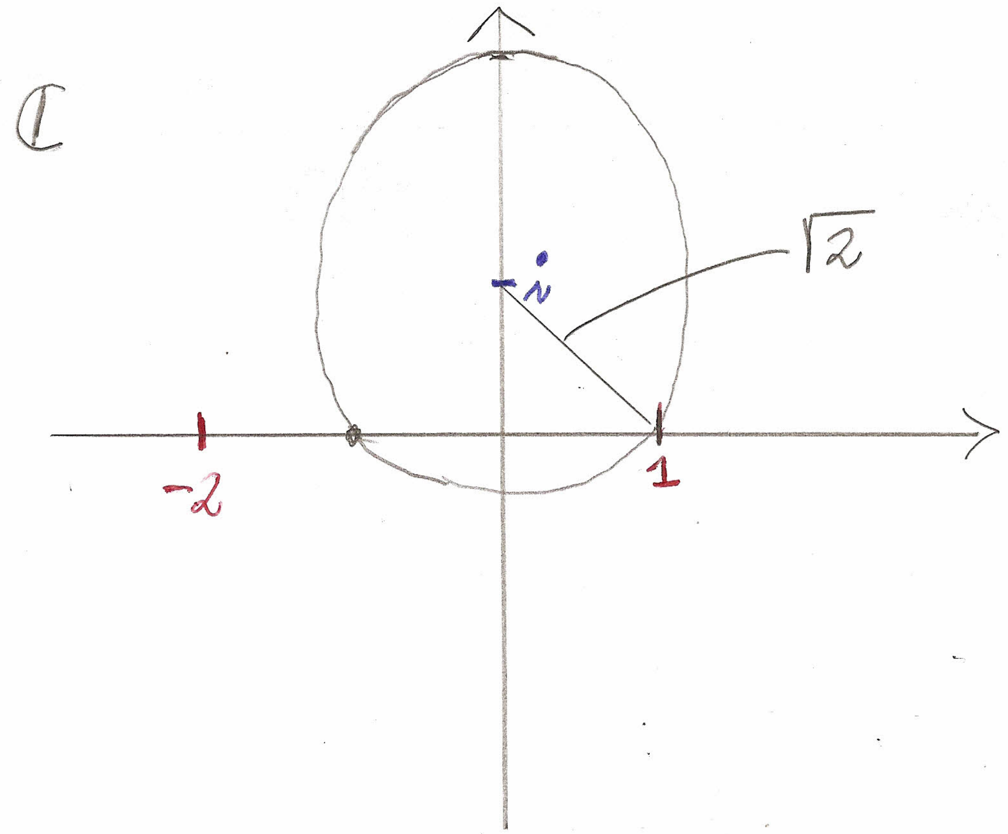
$\left(= \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z} \right)$

Sei $f(z) := \frac{3}{(1-z)(2+z)}$ für $z \in U := \mathbb{C} - \{1, -2\}$. Gesucht:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taylor-Koeff. zur} \\ \text{Entwicklungsmitte } z_0 = i \end{array} \right.$

Wo konvergiert die Taylor-Reihe?

Nach der vorigen Anmerkung ist die Antwort leicht:



auf der offenen Kreisscheibe $B_{\sqrt{2}}(i)$

(für $r > \sqrt{2}$ ist $B_r(i) \not\subset U$!).

<u>Nun entwickle die Anteile von f in Potenzen von $z-i$:</u>

Für $|z-i| < \sqrt{2}$ gilt (!)

$$\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1 \implies$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} =$$

$$\frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=}$$

$$\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n.$$

Damit ist der Anteil $\frac{1}{1-z}$ von f entwickelt.

Für $|z-i|<\sqrt{2}$ ist auch

$$\left|\frac{z-i}{2+i}\right|<1 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2+i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2+i}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=}$$

$$\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2+i}\right)^n.$$

Dies ist die Entwicklung von $\frac{1}{2+z}$ in Potenzen von $z-i$.

Es gilt aber

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z}$$

(Partialbruchzerlegung o. ä.) $\Longrightarrow$

Taylor Entwicklung von f um $z_0 = i$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(2+i)^{n+1}} \right] \cdot (z-i)^n,$$

$$|z-i| < \sqrt{2}.$$

Natürlich hätte man auch versuchen können, Rekursionsformeln für die Ableitungen $f^{(n)}(i)$ herzuleiten.

24.2 Laurent Reihen

Sei $f(z) := \frac{e^z}{z}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

f hat sicher keine Taylor Entwicklung mit $z_0 := 0$ als Entwicklungsmitte, aber das Verhalten von f ist trotzdem überschaubar:

Für $z \neq 0$ ist

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k =$$

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1} =$$

$$\frac{1}{z} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} z^l$$

Anteil 1 : z^{-1}

misst das singulär Verhalten von $f(z)$ bei $z \to 0$

Anteil 2 : $1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{3!} z^2 + \ldots\ldots$

dies ist der auch über 0 hinweg holomorphe Baustein von f

noch ein Beispiel: $f(z) := e^{1/z}, \; z \neq 0$

es ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} =$$

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \ldots$$

holomorpher Anteil :

Konstante Funktion 1

singulärer Anteil :

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots\ldots$$

Das schlechte Verhalten von $f(z)$ bei $z \to 0$ spiegelt sich im Auftreten aller negativen Potenzen wieder.

Frage : Wenn $f(z)$ holomorph ist für $z \neq 0$ (nahe 0), aber in $z = 0$ möglicherweise undefiniert ist, kann man dann f additiv zerlegen in einen bei 0 holomorphen und einen singulären Anteil?

Diskussion:

Wir betrachten allgemein Funktionen f, die auf einem

Kreisring $A_{r_1, r_2}(z_0) :=$

$$\{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$$

holomorph sind.

Es gelte: $z_0 \in \mathbb{C}$ (Mittelpunkt),

$r_1 \geq 0$ innerer Radius,

$r_2 \in (r_1, \infty]$ äußerer Radius.

In den Beispielen:

$$z_0 = 0, \; r_1 = 0, \; r_2 = \infty$$

Die geplante Entwicklung von f soll so aussehen: (Laurent-Reihen)

Def. 24.2.1: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Dann heißt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k :=$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{Neben- oder Regulärteil}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}}$$

eine Laurent Reihe um den Entwicklungspunkt z_0.